SET – 3

Series : BVM/1

कोड नं.
Code No. **65/1/3**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

PARIKSHA 2019 PARIKSHA 2019

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*
*Time allowed : **3** hours* | *Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न–पत्र में* ***29*** *प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में* ***4*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***8*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***दो अंक*** *का है । खण्ड स में* ***11*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड द में* ***6*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न–पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के* ***1*** *प्रश्न, खण्ड ब के* ***3*** *प्रश्नों में, खण्ड स के* ***3*** *प्रश्नों में तथा खण्ड द के* ***3*** *प्रश्नों में आंतरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको* ***एक*** *ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *This question paper contains* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of 4 questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of 8 questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of 11 questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of 6 questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only* ***one*** *of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is not permitted. You may ask logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **4** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **4** carry **1** mark each.

1. यदि $3A - B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो आव्यूह A ज्ञात कीजिए ।

   If $3A - B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, then find the matrix A.

2. निम्न अवकल समीकरण की कोटि व घात लिखिए :

$$x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$$

Write the order and the degree of the following differential equation :

$$x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$$

3. यदि $f(x) = x + 1$ है, तो $\frac{d}{dx}(fof)(x)$ ज्ञात कीजिए ।

If $f(x) = x + 1$, find $\frac{d}{dx}(fof)(x)$.

4. यदि एक रेखा x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष से क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है । इस रेखा के दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए ।

अथवा

उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4, 5) से गुजरती है तथा सदिश $2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ के समांतर है ।

If a line makes angles 90°, 135°, 45° with the x, y and z axes respectively, find its direction cosines.

OR

Find the vector equation of the line which passes through the point (3, 4, 5) and is parallel to the vector $2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$.

खण्ड – ब

SECTION – B

प्रश्न संख्या **5** से **12** तक प्रत्येक प्रश्न **2** अंक हैं ।

Question numbers **5** to **12** carry **2** marks each.

5. ज्ञात कीजिए : $\int \sin x \cdot \log \cos x \, dx$

Find : $\int \sin x \cdot \log \cos x \, dx$.

6. मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \sin x \cos^2 x \, dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x} \, dx$

Evaluate : $\int_{-\pi}^{\pi} (1 - x^2) \sin x \cos^2 x \, dx$.

OR

Evaluate : $\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x} \, dx$.

7. जाँच कीजिए कि क्या संक्रिया * जो R पर a * b = ab + 1 द्वारा परिभाषित है (i) द्वि-आधारी संक्रिया होगी या नहीं (ii) यदि यह द्वि-आधारी है, तो क्या यह साहचर्य होगी या नहीं ?

Examine whether the operation * defined on R by a * b = ab + 1 is (i) a binary or not. (ii) if a binary operation, is it associative or not ?

8. आव्यूह A ज्ञात कीजिए यदि 2A – 3B + 5C = O, जहाँ $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ हैं।

Find a matrix A such that 2A – 3B + 5C = O, where $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

9. एक पाँसा जिस पर 1, 2, 3 लाल रंग से तथा 4, 5, 6 हरे रंग से लिखा गया है, को उछाला जाता है। "संख्या सम होने" की घटना को A से व "संख्या लाल रंग में लिखी है" की घटना B से परिभाषित है। ज्ञात कीजिए कि क्या ये दो घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं या नहीं।

A die marked 1, 2, 3 in red and 4, 5, 6 in green is tossed. Let A be the event "number is even" and B be the event "number is marked red". Find whether the events A and B are independent or not.

10. वक्रों के कुल $y = e^{2x}(a + bx)$, जिसमें a, b स्वेच्छ अचर हैं, को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Form the differential equation representing the family of curves $y = e^{2x}(a + bx)$, where 'a' and 'b' are arbitrary constants.

11. एक पासे को छः बार उछाला जाता है । यदि "पासे पर विषम संख्या प्राप्त होना" एक सफलता है, तो (i) 5 सफलताएँ (ii) अधिकतम 5 सफलताएँ, की प्रायिकताएँ क्या-क्या होंगी ?

अथवा

एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन P(X) निम्न प्रकार से है, जहाँ 'k' कोई संख्या है :

$$P(X = x) = \begin{cases} k\ , & \text{यदि } x = 0 \\ 2k, & \text{यदि } x = 1 \\ 3k, & \text{यदि } x = 2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

'k' का मान ज्ञात कीजिए ।

A die is thrown 6 times. If "getting an odd number" is a "success", what is the probability of (i) 5 successes ? (ii) atmost 5 successes ?

OR

The random variable X has a probability distribution P(X) of the following form, where 'k' is some number.

$$P(X = x) = \begin{cases} k\ , & \text{if } x = 0 \\ 2k, & \text{if } x = 1 \\ 3k, & \text{if } x = 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Determine the value of 'k'.

12. यदि दो मात्रक सदिशों का योग एक मात्रक सदिश हो, तो सिद्ध कीजिए कि उन दो सदिशों के अन्तर का परिमाण $\sqrt{3}$ होगा ।

अथवा

यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ है, तो $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ ज्ञात कीजिए ।

If the sum of two unit vectors is a unit vector, prove that the magnitude of their difference is $\sqrt{3}$.

OR

If $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = -3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, find $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या **13** से **23** तक प्रत्येक प्रश्न के **4** अंक हैं ।

Question numbers **13** to **23** carry **4** marks each.

13. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

14. हल कीजिए : $\tan^{-1} 4x + \tan^{-1} 6x = \frac{\pi}{4}$

Solve : $\tan^{-1} 4x + \tan^{-1} 6x = \frac{\pi}{4}$.

15. दिखाइए कि समुच्चय $\mathbb{R}$ में $R = \{(a, b) : a \leq b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य व संक्रामक है, परन्तु सममित नहीं है ।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि फलन $f : N \to N$, $f(x) = x^2 + x + 1$, द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी फलन है किंतु आच्छादक नहीं ।

फलन $f : N \to S$, जहाँ S फलन f का परिसर है, का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिए ।

Show that the relation R on $\mathbb{R}$ defined as $R = \{(a, b) : a \leq b\}$, is reflexive, and transitive but not symmetric.

OR

Prove that the function $f : N \to N$, defined by $f(x) = x^2 + x + 1$ is one-one but not onto. Find inverse of $f : N \to S$, where S is range of f.

16. वक्र $y = \sqrt{3x - 2}$ की उस स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x - 2y + 5 = 0$ के समान्तर है । स्पर्श बिन्दु से वक्र पर बने अभिलंब का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of tangent to the curve $y = \sqrt{3x - 2}$ which is parallel to the line $4x - 2y + 5 = 0$. Also, write the equation of normal to the curve at the point of contact.

17 यदि $\log (x^2 + y^2) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x}\right)$ हो, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$.

अथवा

यदि $x^y - y^x = a^b$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $\log (x^2 + y^2) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x}\right)$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$.

OR

If $x^y - y^x = a^b$, find $\frac{dy}{dx}$.

18. यदि $y = (\sin^{-1}x)^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$.

If $y = (\sin^{-1}x)^2$, prove that $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$.

19. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$, अतः $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Prove that $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$, hence evaluate $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

20. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)} dx$

Find : $\int \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)} dx$

21. अवकल समीकरण : $\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} y = x^2 + 2$ को हल कीजिए ।

अथवा

अवकल समीकरण : $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1;\ y(0) = 0$ को हल कीजिए ।

Solve the differential equation : $\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1+x^2} y = x^2 + 2$

OR

Solve the differential equation : $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1;\ y(0) = 0$.

22. यदि $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ 2\hat{i} + 5\hat{j},\ 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ क्रमशः बिन्दु A, B, C और D के स्थिति सदिश हों तो सरल रेखाओं AB तथा CD के बीच का कोण ज्ञात कीजिए । ज्ञात कीजिए कि क्या सदिश $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{CD}$ संरेख हैं या नहीं ।

If $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ 2\hat{i} + 5\hat{j},\ 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ and $\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$ respectively are the position vectors of points A, B, C and D, then find the angle between the straight lines AB and CD. Find whether $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{CD}$ are collinear or not.

23. λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्न रेखाएँ लम्बवत हैं :

$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{\lambda} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{7-7x}{3\lambda} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$, यह भी ज्ञात कीजिए कि क्या ये रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं या नहीं ।

Find the value of λ, so that the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{\lambda} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3\lambda} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are at right angles. Also, find whether the lines are intersecting or not.

खण्ड – द

SECTION – D

प्रश्न संख्या **24** से **29** तक प्रत्येक प्रश्न के **6** अंक हैं ।

Question numbers **24** to **29** carry **6** marks each.

24. आयताकार आधार व आयताकार दीवारों की 2 m गहरी और 8 m^3 आयतन की एक बिना ढक्कन की टंकी का निर्माण करना है । यदि टंकी के निर्माण में आधार के लिए ₹ 70/m^2 और दीवारों पर ₹ 45/m^2 व्यय आता है तो न्यूनतम खर्च से बनी टंकी की लागत क्या है ?

A tank with rectangular base and rectangular sides, open at the top is to be constructed so that its depth is 2 m and volume is 8 m^3. If building of tank costs ₹ 70 per square metre for the base and ₹ 45 per square metre for the sides, what is the cost of least expensive tank ?

25. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए ।

अत: निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$x + y + z = 6$

$x + 2z = 7$

$3x + y + z = 12$

अथवा

प्रारंभिक संक्रियाओं द्वारा निम्न आव्यूह का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, find A^{-1}. Hence, solve the system of equations

$x + y + z = 6$, $x + 2z = 7$, $3x + y + z = 12$.

OR

Find the inverse of the following matrix using elementary operations.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

26. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$ रेखाओं $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ एवं $y = 0$ से घिरे वर्ग के क्षेत्रफल को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं ।

अथवा

समाकलन विधि से, उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (2, 3), (3, 5) एवं (4, 4) हैं ।

Prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ divide the area of the square bounded by sides $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ and $y = 0$ into three equal parts.

OR

Using integration, find the area of the triangle whose vertices are (2, 3), (3, 5) and (4, 4).

27. एक निर्माता 5 कुशल व 10 अर्धकुशल कारीगरों को काम पर रखता है और एक उत्पाद के दो नमूने A और B बनाता है । नमूना A के प्रत्येक नग बनाने के लिए कुशल कारीगर को 2 घंटे व अर्धकुशल कारीगर को 2 घंटे काम करना पड़ता है । नमूना B के प्रत्येक नग बनाने के लिए कुशल कारीगर को 1 घंटा व अर्ध–कुशल कारीगर को 3 घंटे काम करना पड़ता है । दोनों ही कारीगरों में प्रत्येक को काम करने के लिए प्रतिदिन अधिकतम 8 घण्टे का समय उपलब्ध है । निर्माता को नमूने A के प्रत्येक नग पर ₹ 15 लाभ व नमूने B के प्रत्येक नग पर ₹ 10 का लाभ होता है । नमूना A और नमूना B के कितने नगों का अधिकतम लाभ कमाने के लिए, प्रतिदिन निर्माण करना चाहिए ? इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में लिखिए और ग्राफ द्वारा हल कीजिए । अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए ।

A manufacturer has employed 5 skilled men and 10 semi-skilled men and makes two models A and B of an article. The making of one item of model A requires 2 hours work by a skilled man and 2 hours work by a semi-skilled man. One item of model B requires 1 hour by a skilled man and 3 hours by a semi-skilled man. No man is expected to work more than 8 hours per day. The manufacturer's profit on an item of model A is ₹ 15 and on an item of model B is ₹ 10. How many of items of each model should be made per day in order to maximize daily profit ? Formulate the above LPP and solve it graphically and find the maximum profit.

28. बिन्दुओं (2, 2, – 1), (3, 4, 2) तथा (7, 0, 6) से गुजरने वाले समतल के सदिश व कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए । अत: उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4, 3, 1) से गुजरता है और ऊपर प्राप्त समतल के समान्तर है ।

अथवा

उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ तथा बिंदु (–1, 3, – 4) को अंतर्विष्ट करता है । इस समतल पर बिन्दु (2, 1, 4) से डाले गए लंब की दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector and Cartesian equations of the plane passing through the points (2, 2 –1), (3, 4, 2) and (7, 0, 6). Also find the vector equation of a plane passing through (4, 3, 1) and parallel to the plane obtained above.

OR

Find the vector equation of the plane that contains the lines $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ and the point (–1, 3, – 4). Also, find the length of the perpendicular drawn from the point (2, 1, 4) to the plane thus obtained.

29. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापना के (या एक साथ) निकाले जाते हैं । बादशाहों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

Two cards are drawn simultaneously (or successively without replacement) from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of kings.